Inverz inga stabilizálása tört rendű késleltetett PD szabályozóval
Stabilization of an inverted pendulum by fractional-order delayed PD controller

BALOGH Tamás [1], *INSPERGER Tamás* [2]

[1] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest, Magyarország
(e-mail: baloghtamas2727@gmail.com)
[2] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék és MTA-BME Lendület Emberi Egyensúlyozás Kutatócsoport, Budapest, Magyarország (e-mail: insperger@mm.bme.hu)

Abstract
In the last few decades the advantages of fractional-order control was demonstrated with several examples in comparison with integer-order control. In this paper an inverted pendulum with delayed PD$^{\mu}$ controller was investigated. The stability chart and the stabilizability diagram was determined. According to the stabilizability diagram, the system can be stabilized for larger values of time delay using PD$^{\mu}$ controller than using PD controller.

Összefoglaló
Az utóbbi évtizedekben számos példán keresztül mutatták be a tört deriváltat tartalmazó szabályozások előnyeit az egész rendű szabályozásokhoz képest. A cikkben egy inverz inga mozgásának megfelelő rendszer időkésleltetett PD$^{\mu}$ szabályozóval történő szabályozását vizsgáltuk. Meghatároztuk a szabályozás stabilitási térképét és a stabilizálhatósági határt. A kapott eredmény alapján PD$^{\mu}$ szabályozóval nagyobb időkésés esetén is stabilizálható a rendszer, mint PD szabályozóval.

Kulcsszavak
időkésés, inverz inga, stabilitás, stabilizálhatóság, tört derivált

1. BEVEZETÉS

Az utóbbi időben a mérnöki tudományok és természettudományok területén számos alkalmazásban jelent meg a tört derivált és a tört deriváltat tartalmazó differenciálegyenletek. A tört derivált fogalmát alkalmazhatjuk többek között a viszkoelasztikus anyagmodellek, és a cikkben is tárgyalt tört deriváltat tartalmazó szabályozók esetén is.

1.1. Alapfogalmak

A szakirodalomban többféle definíció is található a tört deriváltra vonatkozóan. Ezek közül az egyik leggyakrabban használt a Caputo-féle tört derivált definíció, ami az n-szeres integrál rendjének a pozitív valós számokra történő általánosításán alapul. Az a alsó határú, α rendű Caputo-féle tört deriváltat a következőképpen definiálhatjuk [7]:

$$ {}_{a}^{t}D_{*}^{\alpha} f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, m-1<\alpha<m \in \mathbb{N}\,, \\ \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} f(t)\,, \qquad \alpha = m \in \mathbb{N}\,, \end{cases} \tag{1} $$

ahol $\Gamma(x)$ a gamma-függvény. Egy függvény Caputo-féle tört deriváltjának Laplace-transzformáltja $a=0$ alsó határ esetén [7]:

$$ \mathcal{L}\left({}_{0}^{t}D_{*}^{\alpha} f(t)\right) = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)\,. \tag{2} $$

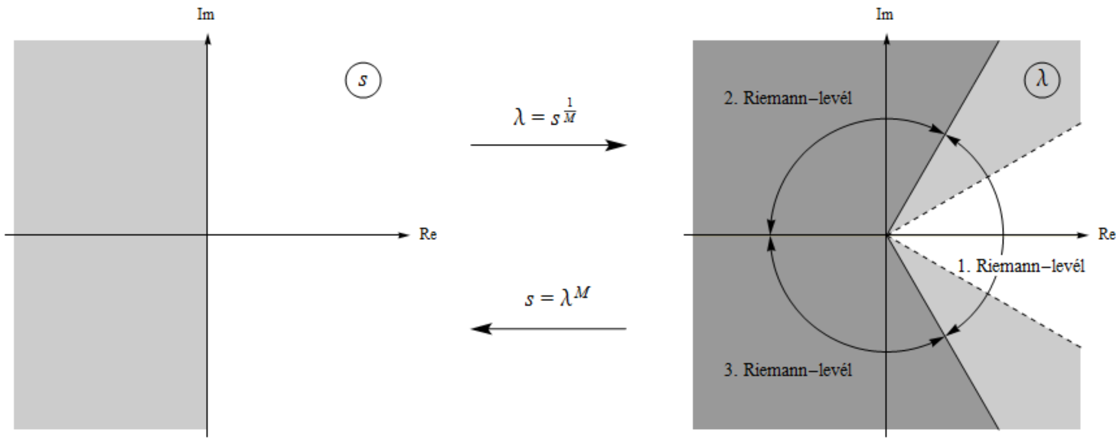
1.2. Tört differenciálegyenletek stabilitása

Az egész rendű differenciálegyenletekhez hasonlóan tört differenciálegyenleteket is értelmezhetünk. Egy Caputo-féle tört deriváltakkal adott lineáris állandó együtthatós tört differenciálegyenlet stabilitását a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete segítségével vizsgálhatjuk. A Laplace-transzformáció után kapott karakterisztikus egyenlet általános esetben a következő alakú:

$$s^{\alpha_n} + \sum_{i=1}^{n-1} A_i\, s^{\alpha_i} + A_0 = 0\,. \tag{3}$$

A (3) egyenletnek megfelelő időkésleltetés nélküli esetben egy gerjesztetlen rendszer aszimptotikus stabilitásának és egy gerjesztett rendszer BIBO (Bounded Input Bounded Output) stabilitásának feltétele is az, hogy a (3) egyenlet bal oldalán található karakterisztikus függvény első Riemann-levélhez tartozó gyökeinek valós része legyen negatív [4, 6].

Legyenek a (3) egyenletben az α_i kitevők racionális számok, és legyen M az α_i kitevők nevezőinek legkisebb közös többszöröse. Ekkor a $\lambda = s^{\frac{1}{M}}$ helyettesítéssel a karakterisztikus függvényt egy polinommá alakíthatjuk. Ez a leképezés trigonometrikus alakban is felírható: $\lambda = |s|^{\frac{1}{M}} \left(\cos\left(\frac{\arg(s)+2k\pi}{M}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\arg(s)+2k\pi}{M}\right)\right)$, ahol $k = 0, 1, \dots, M-1$ és $-\pi < \arg(s) \le \pi$. A különböző k értékekhez tartozó leképezések közül a $k = 0$-hoz tartozó felel meg a $s^{\frac{1}{M}}$ hatvány első Riemann-levélnek megfelelő értékének (főértékének). Ezért a stabilitás feltétele úgy is megfogalmazható, hogy a helyettesítés után kapott polinom λ_i gyökeire teljesüljön a $|\arg(\lambda_i)| > \frac{1}{M}\frac{\pi}{2}$ egyenlőtlenség [4, 6]. A leképezést és a stabil tartományt az s-síkon, illetve a λ-síkon az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra
A stabil tartomány az s-síkon és a λ-síkon $M = 3$ esetén

A későbbiekben vizsgált időkésleltetett esetben is hasonló a stabilitás feltétele, mint az időkésleltetés nélküli esetben: a gerjesztett rendszer BIBO stabil, ha a karakterisztikus függvény első Riemann-levélen lévő gyökeinek valós része negatív [1].

2. STABILITÁSVIZSGÁLAT

A későbbiekben egy tört deriváltat tartalmazó PD szabályozóval szabályozott inverz inga stabilitását vizsgáljuk. A stabilitási térkép meghatározása D-felbontás segítségével történik [2]. Ezután a stabilizálhatósági határ meghatározása következik.

2.1. A vizsgált rendszer differenciálegyenlete

Szabályozzuk az inverz inga mozgásának megfelelő egy szabadságfokú másodrendű instabil rendszert PD$^{\mu}$ szabályozóval, és vegyük figyelembe az időkésést is. A zárt szabályozási kör bemenete legyen az $u_{\mathrm{r}}(t)$ referenciajel. A különbségképzés után a hibajel $e(t) = u_{\mathrm{r}}(t) - y(t)$. Az eredő rendszer egyenlete a következő lesz:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} - a_0\, y(t) = k_{\mathrm{p}}\, e(t-\tau) + k_{\mathrm{d}}\, {}_0^t D_*^{\mu} e(t-\tau)\,, \tag{4}$$

ahol $a_0 > 0$ a merevség, τ az időkésés, k_{p} az arányos tag együtthatója, k_{d} a deriváló tag együtthatója és $0 < \mu < 2$ a deriválás rendje. A (4) differenciálegyenlet dimenziótlanítás után a következő alakra hozható:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^2} - a\, y(\vartheta) = p\, e(\vartheta - 1) + d\, {}_0^{\vartheta} D_*^{\mu} e(\vartheta - 1)\,, \tag{5}$$

ahol $\vartheta = \frac{t}{\tau}$, $a = a_0 \tau^2,\ p = k_p \tau^2,\ d = k_d \tau^{2-\mu}$.

A dimenziótlanított differenciálegyenlet karakterisztikus függvényét megkaphatjuk Laplace-transzformáció segítségével:

$$D(s) = s^2 - a + p\, e^{-s} + d\, s^{\mu} e^{-s}\,. \tag{6}$$

2.2. A stabilitási térkép

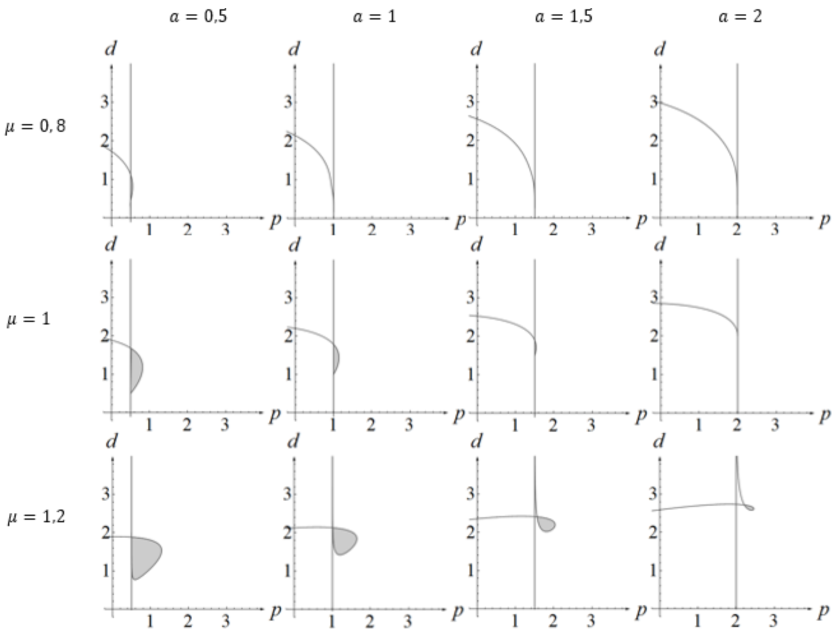
A stabilitási térkép tartományainak határait jelentő RRB (Real Root Boundary) és CRB (Complex Root Boundary) típusú D-görbéket a $D(s)$ karakterisztikus függvényből kaphatjuk meg a $D(0) = 0$ és $D(\pm \mathrm{i}\, x) = 0$ egyenletek alapján [2]. Az RRB D-görbe egyenlete:

$$p = a\,. \tag{7}$$

A CRB D-görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$p = \frac{(x^2+a)\sin\left(\mu\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)}\ ,\ d = \frac{(x^2+a)\sin(x)}{x^{\mu}\sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)}\ ,\ x > 0\,. \tag{8}$$

A D-görbék által határolt tartományokban az instabil gyökök száma egy numerikus módszer segítségével meghatározható [5], így meghatározható a stabil tartomány is a stabilitási térképen. A 2. ábrán látható a stabilitási térkép és a BIBO stabil tartomány különböző a és μ értékek esetén.



2. ábra
Az (5) egyenlet stabilitási térképének változása az a és μ paraméterek változása esetén

2.3. A stabilizálhatósági határ

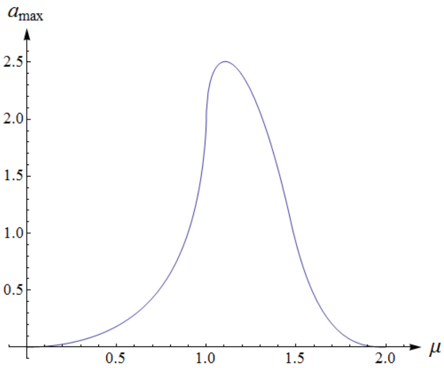
A 2. ábra alapján látszik, hogy rögzített μ esetén a stabil tartomány egyre kisebb lesz, majd eltűnik, ha a nő. A stabil tartomány eltűnéséhez tartozó a értéket ($a_{\max}$) nevezhetjük stabilizálhatósági határnak. A stabil tartományt a CRB görbe kezdeti szakasza határozza meg, a stabilizálhatósági határ meghatározásakor elég a CRB görbe $0 < x < \mu\frac{\pi}{2}$ szakaszát vizsgálni. Az $a_{\max}(\mu)$ görbe meghatározása különböző módon történhet a $0 < \mu < 1$ és a $1 < \mu < 2$ esetben, mivel a két esetben különbözik a stabilizálhatóság határhelyzetére vonatkozó feltétel.

A $0 < \mu < 1$ esetben a stabilizálhatóság határhelyzetében az RRB egyenes érinti a CRB D-görbét, az érintési pontban $p = a$, illetve a $p(x)$ függvénynek lokális maximuma van, tehát $p(x)$ függvény x szerinti deriváltja 0. A határhelyzetre vonatkozó feltételeket felhasználva levezethető az $a_{\max}(\mu)$ görbe két részben megadható paraméteres egyenletrendszere:

$$\mu_{1,2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-4\sin(x)\cos(x)+2\sin(x)+x\cos(x)\pm\sqrt{\Delta(x)}}{2(-2\cos^2(x)+2\cos(x)-x\sin(x))}\right), \quad a_{\max 1,2} = \frac{x^2\sin\left(\mu_{1,2}\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\mu_{1,2}\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\mu_{1,2}\frac{\pi}{2}-x\right)}, \tag{9}$$

ahol $\Delta(x) = 4\sin^2(x) + x^2\cos^2(x) + 4x\sin(x)\cos(x) - 8x\sin(x)$. Mindkét rész értelmezési tartománya a $]0, x_{\max}]$ intervallum. Az $x_{\max}$ helyen a két görbe ugyanazt az értéket veszi fel, ezért $\Delta(x_{\max}) = 0$. Tehát $x_{\max}$ a $\Delta(x) = 0$ egyenlet $0 < x < \mu\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ feltétel melletti gyöke. Az egyenlet numerikus megoldásával kapott érték: $x_{\max} = 0{,}543358$.

A $1 < \mu < 2$ esetben a stabil tartományt közrezáró hurok a stabilizálhatóság határhelyzetében megszűnik. A hurok megszűnéséhez tartozó a érték, és így az $a_{\max}(\mu)$ görbe is meghatározható numerikus módszerek segítségével. A teljes $0 < \mu < 2$ tartományra vonatkozó stabilizálhatósági határ a 3. ábrán látható.



3. ábra

A stabilizálhatóság határára vonatkozó $a_{\max}(\mu)$ görbe, ha $0 < \mu < 2$

Látszik, hogy PD$^{\mu}$ szabályozó alkalmazása esetén növelhető a stabilizálhatóság a PD szabályozóhoz tartozó $a_{\max}(\mu = 1) = 2$ szakirodalomból ismert értékhez képest [3]. Az $a_{\max}(\mu)$ görbe maximumértéke és maximumhelye a görbe numerikusan kiszámított pontjai alapján: $a^*_{\max} = a_{\max}(\mu^*) = 2{,}5066$ és $\mu^* = 1{,}106$.

[1] Busłowicz, M.: *Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type*, Bull. Pol. Ac.: Tech, 56(4): 319–324, 2008.
[2] Hamamci, S. E.: *An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers*, IEEE Transactions on Automatic Control, 52(10): 1964–1969, 2007.
[3] Insperger, T., Stépán, G.: *Semi-Discretization for Time-Delay Systems – Stability and Engineering Applications*, Springer, New York, 2013.
[4] Matignon, D.: *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*, Computational engineering in systems applications, 2: 963–968, Lille, 1996.
[5] Merrikh-Bayat, F.: *General formula for stability testing of linear systems with fractional-delay characteristic equation*, Open Physics, 11(6): 855–862, 2013.
[6] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., Feliu-Batlle, V.: *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*, Springer, London, 2010.
[7] Podlubny, I.: *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, 1999.